

Να ελεγχθείτε τις παρακάτω σειρές ως προς τη σύγκλιση

$$\alpha) \sum_{v=1}^{\infty} v! \cdot v^{-v}$$

$$\gamma) \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(v+1)^v}{v^{2v}}$$

$$\beta) \sum_{v=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{v^{v+1}}}$$

$$\delta) \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v^{v-1}}{3^{v-1} \cdot (v+1)!}$$

} $\forall v \in \mathbb{N}$

ΛΥΣΗ

α) Επιλέγουμε, το κρ. παιδικών P' a Lambert εσοτιε.

$$a_v = v! \cdot v^{-v} = v! \cdot \frac{1}{v^v} > 0, \forall v \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{a_{v+1}}{a_v} &= \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\frac{(v+1)!}{(v+1)^{v+1}}}{\frac{v!}{v^v}} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{(v+1)! v^v}{v! (v+1)^{v+1}} \\ &= \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{v! (v+1) \cdot v^v}{v! (v+1) \cdot (v+1)^v} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{v^v}{(v+1)^v} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{v+1}{v}\right)^v} \\ &= \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{v}\right)^v} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

β) Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} a_v &= \sqrt{\frac{1}{v^{v+1}}} = \left(\frac{1}{v^{v+1}}\right)^{1/2} = \frac{1}{(v^{v+1})^{1/2}} = \frac{1}{v^{v+1/2}} = \frac{1}{v^{1+1/2}} \\ &= \frac{1}{v! \cdot v^{1/2}} = \frac{1}{v \cdot \sqrt{v}} \geq 0 \end{aligned}$$

Επιλέγουμε, ως $\beta_v = \frac{1}{v}$, $v \in \mathbb{N}$ εφαρμόζοντας οριακό κριτήριο σύγκλισης:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{a_v}{\beta_v} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1/v \cdot \sqrt{v}}{1/v} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{v}} = \frac{1}{\lim_{v \rightarrow \infty} \sqrt{v}} = 1$$

Διλαδί, το όριο είναι $l=1$
 όπου $0 < l < +\infty \rightsquigarrow \sum_{v=1}^{\infty} \beta_v = +\infty \Leftrightarrow \sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v = +\infty$
App.

δ) Έχουμε $\alpha_v = \frac{(v+1)^v}{v^{2v}} \geq 0, \forall v \in \mathbb{N}$

Εφαρμόζοντας κρ. v-ορις πηλας του Cauchy

$$\lim \sqrt[v]{\alpha_v} = \lim \sqrt[v]{\frac{(v+1)^v}{v^{2v}}} = \lim \frac{\sqrt[v]{(v+1)^v}}{\sqrt[v]{v^{2v}}} =$$

$$= \lim \frac{v+1}{v^2} = \lim \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v^2} \right) = 0$$

έπει $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{(v+1)^v}{v^{2v}} < +\infty$. αφού $0 \leq \underbrace{k}_{\lim \sqrt[v]{\alpha_v}} \leq 1$

δ) Ανο κριτήριο πλάικω Ράλεμπερτ

$$\lim \frac{a_{v+1}}{a_v} = \lim \frac{\frac{v^{v+1-1}}{3^{v+1-1} \cdot (v+1-1)!}}{\frac{v^{v-1}}{3^{v-1} \cdot (v-1)!}} = \lim \frac{\frac{v^v}{3^v \cdot v!}}{\frac{v^{v-1}}{3^{v-1} \cdot (v-1)!}} =$$

$$= \lim \frac{\cancel{v^v} \cdot 3^v \cdot 3^{-1} \cdot (v-1)!}{\cancel{v^v} \cdot \cancel{v^{-1}} \cdot \cancel{3^v} \cdot (v-1)! \cdot v} = \frac{1}{3} < 1 \rightsquigarrow \sum_{v=1}^{\infty} a_v < +\infty$$