Να εξετάσετε τις παρακάτω σειρές ως προς τη σύγκλιση

α) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu! \cdot \nu^{-\nu}$ γ) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\nu+1)^\nu}{\nu^{2\nu}}$

β) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \sqrt[\nu]{\frac{1}{\nu^{\nu+1}}}$ δ) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^{\nu-1}}{3^{\nu-1}\cdot(\nu+1)!}$ $\Bigg\}\ \forall \nu\in\mathbb{N}$

ΛΥΣΗ

α) Επιλέγοντας το κρ. πηλίκων D'alembert έχουμε

$$\alpha_\nu = \nu!\cdot\nu^{-\nu} = \nu!\cdot\frac{1}{\nu^\nu} > 0,\ \forall \nu\in\mathbb{N}$$

$$\lim\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lim\frac{\frac{(\nu+1)!}{(\nu+1)^{(\nu+1)}}}{\frac{\nu!}{\nu^\nu}} = \lim\frac{(\nu+1)!\,\nu^\nu}{\nu!\,(\nu+1)^{\nu+1}} =$$

$$= \lim\frac{\cancel{\nu!}\cancel{(\nu+1)}\cdot\nu^\nu}{\cancel{\nu!}\cancel{(\nu+1)}\cdot(\nu+1)^\nu} = \lim\frac{\nu^\nu}{(\nu+1)^\nu} = \lim\frac{1}{\frac{(\nu+1)^\nu}{\nu^\nu}} =$$

$$= \lim\frac{1}{\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^\nu} = \lim\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu} = \frac{1}{e}$$

β) Παρατηρούμε ότι:

$$\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{\frac{1}{\nu^{\nu+1}}} = \left(\frac{1}{\nu^{\nu+1}}\right)^{1/\nu} = \frac{1}{(\nu^{\nu+1})^{1/\nu}} = \frac{1}{\nu^{\nu+1/\nu}} = \frac{1}{\nu^{1+1/\nu}} =$$

$$= \frac{1}{\nu^1\cdot\nu^{1/\nu}} = \frac{1}{\nu\cdot\sqrt[\nu]{\nu}} \geq 0$$

Επιλέγω ως $\beta_\nu = \frac{1}{\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}$ εφαρμόζοντας οριακό κριτήριο σύγκρισης:

$$\lim\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \lim\frac{1/\nu\cdot\sqrt[\nu]{\nu}}{1/\nu} = \lim\frac{1}{\sqrt[\nu]{\nu}} = \frac{1}{\lim\sqrt[\nu]{\nu}} = 1$$

Δηλαδή, το όριο είναι $l=1$

όπου $0 < l < +\infty \underset{\text{Αρα}}{\rightsquigarrow} \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu = +\infty \Leftrightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = +\infty$

γ) Έχουμε $\quad a_\nu = \dfrac{(\nu+1)^\nu}{\nu^{2\nu}} \geq 0, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$

Εφαρμόζοντας Κρ. ν-οστής ρίζας του Cauchy

$$\lim \sqrt[\nu]{a_\nu} = \lim \sqrt[\nu]{\frac{(\nu+1)^\nu}{\nu^{2\nu}}} = \lim \frac{\sqrt[\nu]{(\nu+1)^\nu}}{\sqrt[\nu]{\nu^{2\nu}}} =$$

$$= \lim \frac{\nu+1}{\nu^2} = \lim \left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu^2} \right) = 0$$

άρα $\quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{(\nu+1)^\nu}{\nu^{2\nu}} < +\infty. \quad$ αφού $\quad 0 \leq \underset{\lim \sqrt[\nu]{a_\nu}}{\underset{\downarrow}{k}} \leq 1$

δ) Από κριτήριο πηλίκων D'alembert

$$\lim \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \lim \frac{\dfrac{\nu^{\nu+1-1}}{3^{\nu+1-1} \cdot (\nu+1-1)!}}{\dfrac{\nu^{\nu-1}}{3^{\nu-1} \cdot (\nu-1)!}} = \lim \frac{\dfrac{\nu^\nu}{3^\nu \cdot \nu!}}{\dfrac{\nu^{\nu-1}}{3^{\nu-1} \cdot (\nu-1)!}} =$$

$$= \lim \frac{\cancel{\nu^\nu} \cdot \cancel{3^\nu} \cdot 3^{-1} \cdot \cancel{(\nu-1)!}}{\cancel{\nu^\nu} \cancel{\nu^{-1}} \cdot \cancel{3^\nu} \cdot \cancel{(\nu-1)!} \cdot \cancel{\nu}} = \frac{1}{3} < 1 \rightsquigarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu < +\infty.$$